0.1 Homology on Tri-category with T-structure

Lemma 0.1.1

$X \longrightarrow Y \xrightarrow{f} Z \longrightarrow X[1]$ を triangle としたとき、

$$X \cong 0 \Longleftrightarrow f : X \xrightarrow{\cong} Y$$

proof) $X \cong 0$ とすれば、$\mathrm{Hom}(Z, -)$, $\mathrm{Hom}(-, Y)$ を取れば f が iso であることが示される。逆に f が iso とすると、$\mathrm{Hom}(X, -)$ を取ったとき、$\mathrm{Hom}(X, X) = 0$ であることが分かる。これはつまり、$X \longrightarrow X$ は恒等射以外存在しないことを表しており、$1_0 : 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ は当たり前だが、$1_X : X \longrightarrow 0 \longrightarrow X$ でもあり、$X \cong 0$ である。

Corollary 0.1.2

$X \in \mathcal{D}$ に対し、

$$\tau_{\leqq n} X = 0 \Longleftrightarrow \eta : X \xrightarrow{\cong} \tau_{\geqq n+1} X$$

ただし、η は X の triangle の分解 $\tau_{\leqq n} X \xrightarrow{\varepsilon} X \xrightarrow{\eta} \tau_{\geqq n+1} X \longrightarrow \tau_{\leqq n} X$ によるものである。

Lemma 0.1.3

$m \leqq n$ で任意の $X \in \mathcal{D}$ に対し、natural isomorphism

$$\tau_{\leqq m} X \longrightarrow \tau_{\leqq m} \tau_{\leqq n} X \quad , \quad \tau_{\geqq n} X \longrightarrow \tau_{\geqq n} \tau_{\geqq m} X$$

が存在する。

proof)

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqq m} X \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \tau_{\geqq m+1} X \arrow[r] & \tau_{\leqq m} X[1] \\
\tau_{\leqq n} X \arrow[r] & X \arrow[r] & \tau_{\geqq n+1} X \arrow[r] & \tau_{\leqq n} X[1]
\end{tikzcd}$$

の図式で $\tau_{\leqq m}X \in \mathcal{D}^{\leqq m}$, $\tau_{\geqq n+1}X \in \mathcal{D}^{\geqq n+1}$ であるので、図式をジグザクにたどると morphism は 0 である。よって、

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqq m}X \arrow[r, "\varepsilon_m"] \arrow[d, dotted, "f"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \tau_{\geqq m+1}X \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \tau_{\leqq m}X[1] \arrow[d, dotted, "f[1]"'] \\
\tau_{\leqq n}X \arrow[r, "\varepsilon_n"] & X \arrow[r] & \tau_{\geqq n+1}X \arrow[r] & \tau_{\leqq n}X[1]
\end{tikzcd}$$

を可換にする f が unique に存在する。よって、

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqq m}X \arrow[r, "="] & \tau_{\leqq m}X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] & \tau_{\leqq m}X[1] \\
\tau_{\leqq m}\tau_{\leqq n}X \arrow[r] & \tau_{\leqq n}X \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_n"'] & \tau_{\geqq m+1}\tau_{\leqq n}X \arrow[r] & \tau_{\leqq m}\tau_{\leqq n}X[1] \\
\tau_{\leqq m}X \arrow[r, "\varepsilon_m"'] & X \arrow[r] & \tau_{\geqq m+1}X \arrow[r] & \tau_{\leqq m}X[1]
\end{tikzcd}$$

の図式を考えても、

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqq m}X \arrow[r, "="] \arrow[d, dotted, "g"'] & \tau_{\leqq m}X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \tau_{\leqq m}X[1] \arrow[d, dotted, "g[1]"'] \\
\tau_{\leqq m}\tau_{\leqq n}X \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h"'] & \tau_{\leqq n}X \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_n"'] & \tau_{\geqq m+1}\tau_{\leqq n}X \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \tau_{\leqq m}\tau_{\leqq n}X[1] \arrow[d, dotted, "h[1]"'] \\
\tau_{\leqq m}X \arrow[r, "\varepsilon_m"'] & X \arrow[r] & \tau_{\geqq m+1}X \arrow[r] & \tau_{\leqq m}X[1]
\end{tikzcd}$$

を可換とする g, h が一意に存在するが、その一意性によって $h \circ g = 1$ である。

$\square$

Lemma 0.1.4

$m \leqq n$ で任意の $X \in \mathcal{D}$ に対し、natural isomorphism

$$\tau_{\geqq m}\tau_{\leqq n}X \longrightarrow \tau_{\leqq n}\tau_{\geqq n}X$$

が存在する。これを $\tau_{[m,n]}X$ とかくことにする。

proof)　先と同様に次の図式を考え

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqq m-1}X \arrow[r, "\varepsilon_{m-1}"] \arrow[d, dotted, "f"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \tau_{\geqq m}X \arrow[r] \arrow[d, dotted, "g"'] & \tau_{\leqq m-1}X[1] \arrow[d, dotted, "f[1]"'] \\
\tau_{\leqq n}X \arrow[r, "\varepsilon_n"] & X \arrow[r] & \tau_{\geqq n+1}X \arrow[r] & \tau_{\leqq n}X[1]
\end{tikzcd}$$

とおき、

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_{\geqq m}X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "="'] & \tau_{\geqq n+1}X \arrow[d, "\cong"'] & \\
\tau_{\leqq n}\tau_{\geqq m}X \arrow[r] & \tau_{\geqq m}X \arrow[r] & \tau_{\geqq n+1}\tau_{\geqq m}X \arrow[r] & \tau_{\leqq n}\tau_{\geqq m}X[1]
\end{tikzcd}$$

の図式を考える。縦の同型は Lemma 0.1.3 によるものである。これは定義を思いだすと、

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqq n}X \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\geqq n+1}X \arrow[d, "\cong"'] \\
\tau_{\leqq n}\tau_{\geqq m}X \arrow[r] & \tau_{\geqq m}X \arrow[r] & \tau_{\geqq n+1}\tau_{\geqq m}X
\end{tikzcd}$$

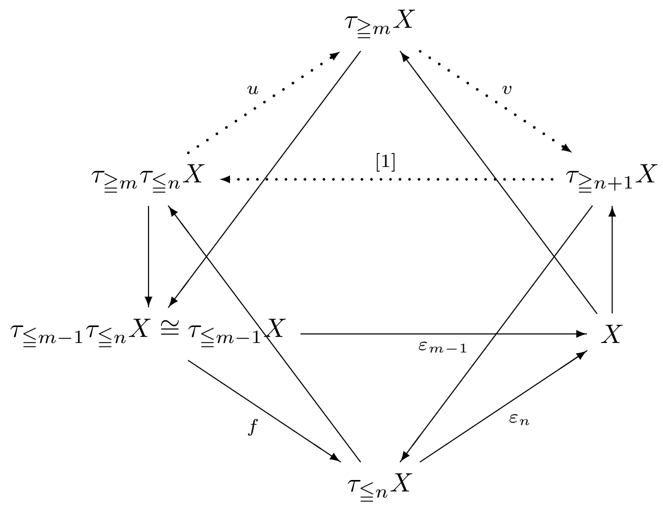
の図式からきていた。このとき、右の可換図式に対し、

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\geqq n+1}X \arrow[d, "\cong"'] \\
\tau_{\geqq m}X \arrow[r] \arrow[ur, "g"] & \tau_{\geqq n+1}\tau_{\geqq m}X
\end{tikzcd}$$

は左上の図式を可換にするので、右下の図式も可換である。すなわち、

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_{\geqq m}X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "="'] & \tau_{\geqq n+1}X \arrow[d, "\cong"'] & \\
\tau_{\leqq n}\tau_{\geqq m}X \arrow[r] & \tau_{\geqq m}X \arrow[r] & \tau_{\geqq n+1}\tau_{\geqq m}X \arrow[r] & \tau_{\leqq n}\tau_{\geqq m}X[1]
\end{tikzcd}$$

は可換である。octhedral axiom により、



となるが、ここでこの図式を v に注目してよく見ると、これは g の性質を満たすため、g の一意性から $v = g$ である。よって、

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\geqq m}\tau_{\leqq n}X \arrow[r, "u"] & \tau_{\geqq m}X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "="'] & \tau_{\geqq n+1}X \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \tau_{\geqq m}\tau_{\leqq n}X[1] \\
\tau_{\leqq n}\tau_{\geqq m}X \arrow[r] & \tau_{\geqq m}X \arrow[r] & \tau_{\geqq n+1}\tau_{\geqq m}X \arrow[r] & \tau_{\leqq n}\tau_{\geqq m}X[1]
\end{tikzcd}$$

で上下横列が triangle であるので、公理より図式を可換にするような、

$$\tau_{\geqq m}\tau_{\leqq n}X \longrightarrow \tau_{\geqq m}\tau_{\leqq n}X$$

が存在し、しかも他二つが iso なので同じく isomorphism となる。

$\square$

Lemma 0.1.5

$m \leqq n$ において、

1. $X \in \mathcal{D}^{\geqq m}$ に対し、$\tau_{\leqq n}X \in \mathcal{D}^{\geqq m}$
2. $X \in \mathcal{D}^{\leqq n}$ に対し、$\tau_{\geqq m}X \in \mathcal{D}^{\leqq n}$

proof)　(1) を示す。

$$\tau_{\leqq m-1}X \longrightarrow X \longrightarrow \tau_{\geqq m}X \longrightarrow (\tau_{\leqq m-1}X)[1]$$

の triangle において、$\tau_{\leqq m-1}X \in \mathcal{D}^{\leqq m-1} \subset \mathcal{D}^{\leqq n+1}$, $X \in \mathcal{D}^{\leqq n}$ であるので、$\tau_{\geqq m}X \in \mathcal{D}^{\leqq n}$ である。(2) も同様にやればよい。

$\square$

Lemma 0.1.6

$\tau_{\leqq n}$, $\tau_{\geqq n}$ は additive functor である。

proof)　$\tau_{\leqq n}$ について考える。$\tau_{\leqq n} = [-n] \circ \tau_{\leqq 0} \circ [n]$ であり、[1] は定義により additive であるので、$\tau_{\leqq 0}$ が additive であることを示せばよい。$X, Y \in \mathcal{D}$ に対し、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) \arrow[rr, "\tau_{\leqq 0}"] \arrow[dr, "\varepsilon^*"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\leqq 0}}(\tau_{\leqq 0}X, \tau_{\leqq 0}Y) \arrow[dl, "\cong"', "\varepsilon_*"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\tau_{\leqq 0}, Y) &
\end{tikzcd}$$

は可換であるため、ε からの誘導は準同型なので、$\tau_{\leqq 0}$ も準同型である。$\tau_{\geqq n}$ に関しても同様。

$\square$

Lemma 0.1.7

$\mathcal{A}$: abelian category

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

is sequence in $\mathcal{A}$ とする。また、任意の $D \in \mathcal{A}$ に対し、$\mathrm{Hom}(-, D)$ を取った

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,D) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B,D) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A,D)$$

が exact ならば、

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

は exact in $\mathcal{A}$

proof)　Coker$f \cong C$ を示せばよい。

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{p} \mathrm{Coker}f$$

と cokernel に付随する morphism を p とする。$D = \mathrm{Coker}f$ としたとき、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, \mathrm{Coker}f) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B, \mathrm{Coker}f) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Coker}f)$$

が exact であるので、$p \in \mathrm{Hom}(B, \mathrm{Coker}f)$ に対し、$f^*(p) = 0$ であり、${}^\exists h \in \mathrm{Hom}(C, \mathrm{Coker}f)$ s.t　$g^*(h) = h \circ g = p$ であるが、g^* が単射なので h は一意に存在する。

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "p"'] & \mathrm{Coker}f
\end{tikzcd}$$

の可換図があり、一方 $D = C$ とおくと、$\mathrm{Hom}(-, C)$ の完全列から $g \circ f = 0$ であることが分かり、Cokernel の定義から、上の図式を可換にする

$$h' : \mathrm{Coker}f \longrightarrow C$$

が一意に存在する。h, h' の一意性からこれらは互いに inverce である。

□

Lemma 0.1.8

$\mathcal{A}$: abelian category とし、

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0 \quad , \quad 0 \longrightarrow D \xrightarrow{h} C$$

はともに exact in $\mathcal{A}$ とする。このとき、

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h \circ g} C$$

は exact in $\mathcal{A}$

proof)　仮定から Ker$h \cong 0$ なので、$\mathrm{Ker}(h \circ g) \cong \mathrm{Ker}g \cong \mathrm{Coim}f$

$\square$

Lemma 0.1.9

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X[1]$ を triangle とし、$X \in \mathcal{D}^{\leqq 0}$ とすると、

$$\tau_{\geqq 1} g : \tau_{\geqq 1} Y \xrightarrow{\cong} \tau_{\geqq 1} Z$$

proof)　任意の $W \in \mathcal{D}^{\geqq 1}$ に対し、

$$\mathrm{Hom}(X[1], W) = 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z, W) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, W) = 0$$

の完全列から、$g^* : \mathrm{Hom}(Z, W) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(Y, W)$ である。このとき、$\tau_{\geqq 1}$ は inclusion の left adjoint であったので、

$$\eta^* : \mathrm{Hom}(\tau_{\geqq 1} Z, W) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(Z, W)$$

であり、これで置き換えると、

$$(\tau_{\geqq 1} g)^* : \mathrm{Hom}(\tau_{\geqq 1} Z, W) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(\tau_{\geqq 1} Y, W)$$

である。ここで $W = \tau_{\geqq 1} Y$ とおいたとき、

$$h : \tau_{\geqq 1} Z \longrightarrow \tau_{\geqq 1} Y$$

が存在し、$h \circ \tau_{\geqq 1} g = 1_{\tau_{\geqq 1} Y} \cdots\cdots$　を満たす。これで半分は示された。残り半分は面倒である。

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta"'] & Z \arrow[d, "\eta"] \\
\tau_{\geqq 1} Y & \tau_{\geqq 1} Z \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

は、$h \circ \eta \circ g = h \circ \tau_{\geqq 1} g \circ \eta = \eta$ なので可換である。さらに、octahedral axiom を用

いると、

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[ddl] \arrow[dr, dotted, "v"] & & \\
 & C_{\tau_{\leqq 0}f} \arrow[ur, dotted, "u"] \arrow[d] & & \tau_{\geqq 1}Y \arrow[ll, dotted, "{[1]}", "g"'] \arrow[ddl] & \\
 & X \arrow[rr, "f"'] \arrow[dr, "\tau_{\leqq 0}f"'] & & Y \arrow[u, "\eta"'] \arrow[uul] & \\
 & & \tau_{\leqq 0}Y \arrow[uul] \arrow[ur, "\varepsilon"'] & &
\end{tikzcd}$$

となり、

$$C_{\tau_{\leqq 0}f} \xrightarrow{u} Z \xrightarrow{v} \tau_{\geqq 1}Y \longrightarrow C_{\tau_{\leqq 0}f}[1]$$

という triangle があるが、

$$\tau_{\leqq 0}X = X \in \mathcal{D}^{\leqq 0} \xrightarrow{\tau_{\leqq 0}f} \tau_{\leqq 0}Y \in \mathcal{D}^{\leqq 0} \longrightarrow C_{\tau_{\leqq 0}f} \longrightarrow X[1] \in \mathcal{D}^{\leqq -1}$$

であるから、$C_{\tau_{\leqq 0}f} \in \mathcal{D}^{\leqq 0}$ である。よって、$W \in \mathcal{D}^{\geqq 1}$ に対し、

$$v^* : \mathrm{Hom}(\tau_{\geqq 1}Y, W) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(Z, W)$$

であるが、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\tau_{\geqq 1}Z, W) \arrow[d, "\eta^*"] & \mathrm{Hom}(\tau_{\geqq 1}Y, W) \arrow[l, "h^*"'] \arrow[d, "\eta^*"] \arrow[dl, "v^*"'] \\
\mathrm{Hom}(Z, W) \arrow[r, "g^*"] & \mathrm{Hom}(Y, W)
\end{tikzcd}$$

で g^* が iso であるので、これは可換図である。よって、h^* 以外は iso なので、h^* も iso であり、$W = \tau_{\geqq 1}Z$ とおくと、

$$h' : \tau_{\geqq 1}Y \longrightarrow \tau_{\geqq 1}Z$$

が存在し、$h' \circ h = 1_{\tau_{\geqq 1}Z} \cdots\cdots$　を満たす。　、　により、$h' = \tau_{\geqq 1}g$ であり、同型となる。

□

Theorem 0.1.10

$\mathcal{D}$ を t-structure をもつ triangulated category とし、$\mathcal{A}$ をその core とする。

$$H = \tau_{[0,0]} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$$

は homology functor である。

proof) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X[1]$ を triangle としたとき、

$$H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{H(g)} H(Z)$$

が exact in $\mathcal{A}$ を示すのだが、場合わけを詳しく行う。

$X, Y, Z \in \mathcal{D}^{\leqq 0}$ の場合

任意の $W \in \mathcal{A}$ に対し、

$$\mathrm{Hom}(X[1], W) = 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z, W) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(Y, W) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(X, W)$$

が exact である。$H(X) \cong \tau_{\geqq 0} X$ であり、$\tau_{\geqq 0}$ の定義から、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\geqq 0}}(\tau_{\geqq 0} X, Y)$ であるので、上の完全列を書き換えると、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H(Z), W) \xrightarrow{H(g)^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H(Y), W) \xrightarrow{H(f)^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H(X), W)$$

が完全である。このとき、Lemma 0.1.7 により、

$$H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{H(g)} H(Z) \longrightarrow 0$$

は exact in $\mathcal{A}$ である。

$X \in \mathcal{D}^{\leqq 0}$ の場合

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqq 0} X \arrow[r, "\tau_{\leqq 0} f"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \tau_{\leqq 0} Y \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & \tau_{\leqq 0} Z \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & {} \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & {} \\
\tau_{\geqq 1} X \arrow[r] & \tau_{\geqq 1} Y \arrow[r] & \tau_{\geqq 1} Z \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

に対し octahedral axiom から、

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[ddl] \arrow[dr, dotted, "v"] & \\
C_{\tau_{\leqq 0}f} \arrow[ur, dotted, "u"] \arrow[d] & & \tau_{\geqq 1}Y \cong \tau_{\geqq 1}Z \arrow[ll, dotted, "{[1]}"'] \arrow[ddl] \\
X \arrow[rr, "f"'] \arrow[dr, "\tau_{\leqq 0}f"'] & & Y \arrow[u, "\eta"'] \arrow[uul] \\
 & \tau_{\leqq 0}Y \arrow[ur, "\varepsilon"'] \arrow[uul] &
\end{tikzcd}$$

Lemma **??**により、$\tau_{\geqq 1}Y \cong \tau_{\geqq 1}Z$ であり、これで置き換えると η の性質から v は η に変わる。よって diagram の上部の triangle は、

$$C_{\tau_{\leqq 0}f} \xrightarrow{u} Z \xrightarrow{\eta} \tau_{\geqq 1}Z \longrightarrow C_{\tau_{\leqq 0}f}[1]$$

であるため、triangle の unique up to isomorphic なので、$C_{\tau_{\leqq 0}f} \cong \tau_{\leqq 0}Z$ となる。よって、図式左側の triangle は

$$X \xrightarrow{\tau_{\leqq 0}f} \tau_{\leqq 0}Y \xrightarrow{\tau_{\leqq 0}g} \tau_{\leqq 0}Z \longrightarrow X[1]$$

となり　の状況であり、$H(\tau_{\leqq 0}Y) \cong H(Y)$ であるので、

$$H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{H(g)} H(Z) \longrightarrow 0$$

は exact in $\mathcal{A}$ である。

$X, Y, Z \in \mathcal{D}^{\geqq 0}$ の場合

と同様の理論で、

$$0 \longrightarrow H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{H(g)} H(Z)$$

が exact in $\mathcal{A}$ となる。

$Z \in \mathcal{D}^{\geqq 0}$ の場合

と同様の理論で、

$$0 \longrightarrow H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{H(g)} H(Z)$$

が exact in $\mathcal{A}$ となる。

一般の場合

$$\begin{tikzcd}
 & & C_h \arrow[ddll] \arrow[drr, dotted, "v"] & & \\
\tau_{\geqq 1}X \arrow[urr, dotted, "u"] \arrow[d] & & & & Z \arrow[llll, dotted, "{[1]}" above, "w"] \arrow[ddll] \\
\tau_{\leqq 0}X \arrow[rrrr, "h=f\circ\varepsilon"'] \arrow[drr, "\varepsilon"'] & & & & Y \arrow[u, "g"'] \arrow[uull] \\
 & & X \arrow[uull] \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

の octahedral axiom の図式で、

$$\tau_{\leqq 0}X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{w} C_h \longrightarrow (\tau_{\leqq 0}X)[1] \quad , \quad C_h \xrightarrow{v} Z \longrightarrow (\tau_{\geqq 1})X[1] \longrightarrow C_h[1]$$

は triangle であり、$\tau_{\leqq 0}X \in \mathcal{D}^{\leqq 0}$, $(\tau_{\geqq 1}X)[1] \in \mathcal{D}^{\geqq 0}$ なので　、　の結果から、

$$H(\tau_{leqq0}X) \cong H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{H(w)} H(C_h) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H(C_h) \xrightarrow{H(v)} H(Z)$$

の 2 つが exact in $\mathcal{A}$ であるので、Lemma 0.1.8 により、

$$H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{H(g)} H(Z)$$

□